

Série n° 5

Exercice 1.

Pour chacune des matrices suivantes on dira s'elle est inversible ou non :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -7 & -1 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Dans le cas où la matrice est inversible, on calculera l'inverse.
2. En déduire la solution du système à trois équations et à trois inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} -x + y - z = -2 \\ 2x - 2y - 2z = 4 \\ 3x - 7y - z = 10 \end{cases}.$$

Exercice 2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $A^2 + I_n$ et $A + I_n$ sont inversibles, et que $A^3 - I_n$ n'est pas inversible si A est non nulle.

Exercice 3.

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 . Vérifier la relation $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 4.

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^2 puis B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Vérifier que $B + I_3 = A$ et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5.

Dans \mathbb{R}^3 , trouver la matrice de passage P de la base canonique (e_1, e_2, e_3) à la base (e'_1, e'_2, e'_3) :

$$e'_1 = (0, 1, 1), \quad e'_2 = (1, 0, 1), \quad e'_3 = (1, 1, 0).$$

Calculer P^{-1} .

Exercice 6.

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et $(a_1, a_2, a_3), (a'_1, a'_2, a'_3)$ deux bases de V telles que :

$$a'_1 = a_1, \quad a'_2 = a_1 + a_2, \quad a'_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

1. Trouver la matrice de passage P de la base (a_1, a_2, a_3) à la base (a'_1, a'_2, a'_3) .
2. Calculer P^{-1} .
3. Généraliser le résultat à un espace vectoriel V de dimension n sur \mathbb{K} .

Exercice 7.

Soit $V = \{\alpha t^2 + \beta t + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ et f l'endomorphisme de V dont la matrice dans la base $(1, t, t^2)$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (3t^2 + 2t, 5t^2 + 3t + 1, 7t^2 + 5t + 3)$ est une base de V .
2. Trouver la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

Exercice 8.

Soit \mathcal{A} l'ensemble des matrices de la forme :

$$A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & a+b-c & a-b \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des éléments de \mathbb{K} .

1. Montrer que \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
2. Trouver une base de ce sous-espace vectoriel.
3. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{K}^3 dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est $A(a, b, c)$. Trouver la matrice de f par rapport à la base (e'_1, e'_2, e'_3) :

$$e'_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3.$$

Correction de la série n°5.

Exercice 1.

1. Pour répondre à cette question nous allons utiliser la méthode de Jordan (Utilisation d'opérations élémentaires)

a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car son déterminant est nul.

b) La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car son déterminant est nul ($\det(A) = 1$). Calculons son inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right); \text{ donc } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autre méthode :

Soit (x, y, z) et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tels que : son déterminant est nul. $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. On a :

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff B^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = x' \\ y + z = y' \\ z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' - y' \\ y = y' - z' \\ z = z' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \text{ donc } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $\det(C) = 0$.

d) On a :

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0; \text{ donc } D \text{ n'est pas inversible.}$$

$$e) \det(E) = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = -2; \text{ donc } E \text{ est inversible et } E^{-1} = \frac{1}{\det(E)} {}^t \text{Com}(E) =$$

$$\frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$f) \det(F) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 16; \text{ donc } F \text{ est inversible, et}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & | & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & | & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & | & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } F^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$g) \det(G) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{pmatrix}$$

$$= -1; \text{ donc } G \text{ est inversible, et}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 11L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -25 & -11 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & | & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -25 & -11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -25 & -11 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 25 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } G^{-1} = \begin{pmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$h) \text{ On a : } \det(H) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0; \text{ donc } H \text{ est inversible, et}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & | & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & | & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_3 \leftarrow -L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Le système :

$$\begin{cases} -x + y - z = -2 \\ 2x - 2y - 2z = 4 \\ 3x - 7y - z = 10 \end{cases}$$

$$\text{s'écrit aussi : } F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}; \text{ comme } F \text{ est inversible et que } F^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

On a :

$$A^3 + A^2 + A = 0 \iff A^3 + A^2 + A + I_n = I_n \iff A^2(A + I_n) + I_n(A + I_n) = I_n \iff (A^2 + I_n)(A + I_n) = I_n;$$

de même, $A^3 + A^2 + A = 0 \iff A^3 + A^2 + A + I_n = I_n \iff (A + I_n)A^2 + (A + I_n)I_n = I_n \iff (A + I_n)(A^2 + I_n) = I_n$; donc $(A + I_n)$ (resp. $(A^2 + I_n)$) est inversible d'inverse $(A^2 + I_n)$ (resp. $(A + I_n)$).

D'autre part, $A^3 + A^2 + A = 0 \iff A(A^2 + A + I_n) = 0 \implies A(A^2 + A + I_n)(A - I_n) = 0 \iff A(A^3 - I_n) = 0$ car $(A^2 + A + I_n)(A - I_n) = A^3 - I_n$; si $A^3 - I_n$ est inversible, alors $A(A^3 - I_n) = 0 \iff (A(A^3 - I_n))(A^3 - I_n)^{-1} = 0 \iff A = 0$ ceci contredit l'hypothèse $A \neq 0$; donc $A^3 - I_n$ n'est pas inversible.

Exercice 3.

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En déduire de 1. que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0 \iff I_3 = -\frac{1}{2}A^2 + \frac{3}{2}A = A(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3) = (-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3)A$; donc A est inversible et $A^{-1} = (-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3)$.

Exercice 4.

$$1. \text{ On a : } B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3B.$$

Montrons, par récurrence sur n , que $B^n = 3^{n-1}B$; la propriété est vraie pour $n = 1, 2$; supposons qu'elle soit vraie à l'ordre n , alors

$$B^{n+1} = B^n \times B = (3^{n-1}B) \times B = 3^{n-1}B^2 = 3^{n-1} \times 3B = 3^n B.$$

2. Il est clair que $B + I_3 = A$. Comme $B \times I_3 = I_3 \times B$,

$$A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k B^k (I_3)^{n-k},$$

avec $B^0 = (I_3)^0 = I_3$; on a :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k B^k (I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k B^k = \sum_{k=1}^n C_n^k B^k + I_3 = \sum_{k=1}^n C_n^k (3^{k-1} B) + I_3 = (\sum_{k=1}^n C_n^k 3^{k-1}) B + I_3 = \frac{1}{3} (\sum_{k=1}^n C_n^k 3^k) B + I_3 = \frac{1}{3} (\sum_{k=0}^n C_n^k 3^k - 1) B + I_3 = \frac{1}{3} (4^n - 1) B + I_3.$$

Exercice 5.

On a :

$e'_1 = (0, 1, 1) = e_2 + e_3$, $e'_2 = (1, 0, 1) = e_1 + e_3$ et $e'_3 = (1, 1, 0) = e_1 + e_2$; donc la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3) est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

P^{-1} est la matrice de passage de la base (e'_1, e'_2, e'_3) à la base (e_1, e_2, e_3) . On a :

$$\begin{cases} e'_1 = e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(-e'_1 + e'_2 + e'_3) \\ e_2 = \frac{1}{2}(e'_1 - e'_2 + e'_3) \\ e_3 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2 - e'_3) \end{cases} ; \text{ donc } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.

1. La matrice de passage de la base (a_1, a_2, a_3) à la base (a'_1, a'_2, a'_3) est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. P^{-1} est la matrice de passage de la base (a'_1, a'_2, a'_3) à la base (a_1, a_2, a_3) :

$$\begin{cases} a'_1 = a_1 \\ a'_2 = a_1 + a_2 \\ a'_3 = a_1 + a_2 + a_3 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = a'_1 \\ a_2 = a'_2 - a'_1 \\ a_3 = a'_3 - a'_2 \end{cases} ;$$

donc $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $(a_1, a_2, \dots, a_n), (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ deux bases de V telles que :

$$a'_1 = a_1, \quad a'_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad a'_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

La matrice de passage de la base (a_1, a_2, \dots, a_n) à la base $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ à la base (a_1, a_2, \dots, a_n) est P^{-1} :

$$\begin{cases} a'_1 = a_1 \\ a'_2 = a_1 + a_2 \\ \dots \\ a'_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = a'_1 \\ a_2 = a'_2 - a'_1 \\ \dots \\ a_n = a'_n - a'_{n-1} \end{cases}$$

$$\text{d'où } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.

1. L'espace vectoriel V est de dimension 3 : $(1, t, t^2)$ est une base de V . Pour montrer que \mathcal{B} est une base il suffit de montrer que \mathcal{B} est libre ou génératrice.

\mathcal{B} est libre .

Soient $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha(3t^2 + 2t) + \beta(5t^2 + 3t + 1) + \lambda(7t^2 + 5t + 3) = 0$, alors

$$\alpha(3t^2 + 2t) + \beta(5t^2 + 3t + 1) + \lambda(7t^2 + 5t + 3) = 0 \iff (3\alpha + 5\beta + 7\lambda)t^2 + (2\alpha + 3\beta + 5\lambda)t + (\beta + 3\lambda) = 0 \iff \begin{cases} 3\alpha + 5\beta + 7\lambda = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 5\lambda = 0 \\ \beta + 3\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -3\lambda \\ 3\alpha - 15\lambda + 7\lambda = 0 \\ 2\alpha - 9\lambda + 5\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = -3\lambda \\ 3\alpha - 8\lambda = 0 \\ 2\alpha - 4\lambda = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \lambda = 0; \text{ donc } \mathcal{B} \text{ est libre.}$$

\mathcal{B} est génératrice.

Soit $\alpha t^2 + \beta t + \gamma \in V$; Cherchons $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha t^2 + \beta t + \gamma = a(3t^2 + 2t) + b(5t^2 + 3t + 1) + c(7t^2 + 5t + 3) \quad (*).$$

$$\text{On a : } (*) \iff (3a + 5b + 7c)t^2 + (2a + 3b + 5c)t + (b + 3c) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma \iff \begin{cases} 3a + 5b + 7c = \alpha \\ 2a + 3b + 5c = \beta \\ b + 3c = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} b = -3c + \lambda \\ 3a - 15c + 5\lambda + 7c = \alpha \\ 2a - 9c + 3\lambda + 5c = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} b = -3c + \lambda \\ 3a - 8c = \alpha - 5\lambda \\ 2a - 4c = \beta - 3\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\alpha + 2\beta - \lambda \\ b = \frac{1}{4}(6\alpha - 9\beta + \lambda) \\ c = \frac{1}{4}(-2\alpha + 3\beta + \lambda) \end{cases}; \text{ donc } \mathcal{B} \text{ est génératrice.}$$

2. La matrice de passage de $(1, t, t^2)$ à la base \mathcal{B} est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculons P^{-1} : soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}$, alors $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} \text{On a : } P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} y + 3z = x' \\ 2x + 3y + 5z = y' \\ 3x + 5y + 7z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3z + x' \\ 2x + 3(-3z + x') + 5z = y' \\ 3x + 5(-3z + x') + 7z = z' \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} y = -3z + x' \\ 2x = 4z - 3x' + y' \\ \frac{3}{2}(4z - 3x' + y') + 5(-3z + x') + 7z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3z + x' \\ x = \frac{1}{2}(4z - 3x' + y') \\ z = \frac{1}{4}x' + \frac{3}{4}y' - \frac{1}{2}z' \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' + 3y' - 2z') - 3x' + y' = \frac{1}{2}(-2x' + 4y' - 2z') \\ y = -3(\frac{1}{4}x' + \frac{3}{4}y' - \frac{1}{2}z') + x' = \frac{1}{4}x' - \frac{9}{4}y' + \frac{3}{2}z' \\ z = \frac{1}{4}x' + \frac{3}{4}y' - \frac{1}{2}z' \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{4}(-4x' + 8y' - 4z') \\ y = \frac{1}{4}(x' - 9y' + 6z') \\ z = \frac{1}{4}(x' + 3y' - 2z') \end{cases} \end{aligned}$$

donc $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et la matrice de f dans la base \mathcal{B} est :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -15 & -16 & -20 \\ 9 & 12 & 16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 8.

1. \mathcal{A} est non vide car la matrice nulle appartient à \mathcal{A} . Soient $A(a, b, c), A(a', b', c') \in \mathcal{A}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned} \alpha A(a, b, c) + \beta A(a', b', c') &= \begin{pmatrix} (\alpha a + \beta a') + (\alpha b + \beta b') \\ (\alpha a + \beta a') - (\alpha b + \beta b') - (\alpha c + \beta c') \\ (\alpha a + \beta a') + (\alpha c + \beta c') \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} (\alpha a + \beta a') - (\alpha b + \beta b') + (\alpha c + \beta c') \\ (\alpha a + \beta a') \\ (\alpha a + \beta a') + (\alpha b + \beta b') - (\alpha c + \beta c') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha a + \beta a') - (\alpha c + \beta c') \\ (\alpha a + \beta a') + (\alpha b + \beta b') + (\alpha c + \beta c') \\ (\alpha a + \beta a') - (\alpha b + \beta b') \end{pmatrix} \\ &= A(\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b', \alpha c + \beta c') \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

2. Tout élément $A(a, b, c)$ de \mathcal{A} s'écrit :

$$A(a, b, c) = aA(1, 0, 0) + bA(0, 1, 0) + cA(0, 0, 1),$$

donc $(A(1, 0, 0), A(0, 1, 0), A(0, 0, 1))$ est une famille génératrice de \mathcal{A} . D'autre part, pour tous $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{K}$ tels que : $\alpha A(1, 0, 0) + \beta A(0, 1, 0) + \lambda A(0, 0, 1) = 0$, on a :

$$\alpha A(1, 0, 0) + \beta A(0, 1, 0) + \lambda A(0, 0, 1) = 0 \iff A(\alpha, \beta, \lambda) = 0 \iff \alpha = \beta = \lambda = 0;$$

donc $(A(1, 0, 0), A(0, 1, 0), A(0, 0, 1))$ est une famille libre de \mathcal{A} ; par suite $(A(1, 0, 0), A(0, 1, 0), A(0, 0, 1))$ est une base de \mathcal{A} .

3. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{K}^3 dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est $A(a, b, c)$. Trouver la matrice de f par rapport à la base (e'_1, e'_2, e'_3) :

$$e'_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3.$$

La matrice de passage de $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

la matrice de f dans la base \mathcal{B}' est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}A(a, b, c)P.$$

$$\text{On a : } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & a+b-c & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3a & a-b+c & a-c \\ 3a & a & a+b+c \\ 3a & a+b-c & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & a-b+c & a-c \\ 0 & b-c & b+2c \\ 0 & 2(b-c) & c-b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..